תורת הקבוצות, תרגיל 9

בתרגיל זה נעסוק במושג שהוא חדש רק אם איננו מניחים את אקסיומת הבחירה. נגדיר קבוצה כסופית דדקינד אם אינה מכילה קבוצה בת מניה. בהנחת אקסיומת הבחירה הקבוצות שאין להן תת קבוצה בת מנייה הן בדיוק הקבוצות הסופיות, ולכן, בהנחה זאת, כל מה שיוכח בתרגיל כבר ידוע לנו.

1. א. תהי A קבוצה סופית דדקינד, ו- B קבוצה סופית. הוכח, כי $A \cup B$ סופית דדקינד.
   ב. תהיינה A, B קבוצות סופיות דדקינד. הוכח, כי $A \cup B$ קבוצה סופית דדקינד.
   ג. האם קיימת קבוצה סופית דדקינד של מספרים טבעיים?

2. תהי A קבוצה סופית דדקינד שכל איבריה קבוצות סופיות דדקינד. נניח בנוסף, כי איברי A הן קבוצות זרות בזוגות. הוכח, כי האיחוד של A אף הוא קבוצה סופית דדקינד.

3. לקבוצה A כלשהי נסמן ב-$C(A)$ את קבוצת העוצמות הקטנות או שוות ל-$|A|$.
   א. הגדר פונקציה מקבוצת החזקה $P(A)$ של A על $C(A)$.
   ב. הגדר פונקציה חח"ח $G : C(A) \to P(P(A))$.
   ג. עבור אלו קבוצות A הקבוצה $P(P(A))$ מכילה קבוצה בת מנייה?
   ד. הוכח שאם קיימת קבוצה A אינסופית שהיא סופית דדקינד אז קיימת כזאת כך ש- $P(A)$ אינה סופית דדקינד.

4. תהי A קבוצה סופית דדקינד ותהי A_n קבוצת הסדרות באורך n המורכבות מאיברים שונים של A.
   א. לאלו קבוצות A קיים שלכל מספר טבעי n $A_n \neq \emptyset$?
   א. האם A_n היא סופית דדקינד?
   ב. מה תוכל לומר לגבי $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$?

תאריך ההגשה: 22.12.2004